Creación no cooperativa de redes

Traducción y resumen
JUAN MANUEL LARROSA

1. Introducción

El presente trabajo introduce sobre los conceptos de juegos no cooperativos aplicados a grafos, basados en el aporte de Bala y Goyal (2000). Se inicia con la descripción del modelo así como se traducen las proposiciones y respectivas demostraciones de los autores. Antes de iniciar el reporte se distinguen dos arquitecturas de red que serán mencionadas repetidas veces a lo largo del mismo: red de rueda (Figura 1A) y red de estrella (Figura 1B).

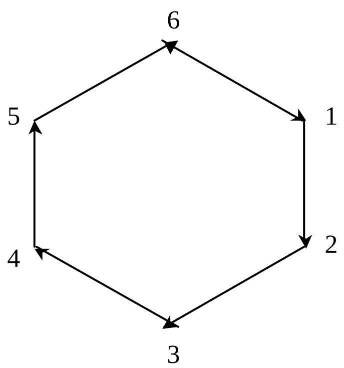

Figure 1A. Red de rueda

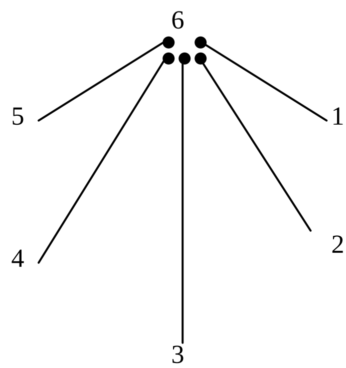

Figure 1B. Red de estrella

2. El modelo

Sea $N=\{1,\ldots,n\}$ un conjunto de agentes y sean i y j típicos miembros de este conjunto. Para evitar trivialidades se asumirá siempre que $n \geq 3$. El argumento que se mantendrá para sustentar la existencia de los lazos entre los agentes es el de la existencia de beneficios de compartir información. En ese sentido se supone que cada agente posee alguna información de valor para él mismo y para los otros agentes. Él puede aumentar esta información comunicándose con otros agentes: este proceso de comunicación asume costos en tiempo, recursos y esfuerzo y es posible sólo a través del establecimiento de enlaces de a pares.

Una *estrategia* para el agente $i \in N$ es un vector (*fila*) $g_t=(g_{t,1},\ldots,g_{t,t-1}, g_{t,t+1},\ldots,g_{t,n})$ donde $g_{i,j} \in \{0,1\}$ para cada $j \in N\backslash\{i\}$. Decimos que i tiene un *enlace* con j si $g_{i,j}=1$. Un enlace entre el agente i y j permite que exista tanto comunicación en un sentido (*one-way*), es decir asimétrica, ó en los dos sentidos (*two-way*) ó simétrica. Con comunicación en un solo sentido el enlace

$g_{i,j}=1$ permite a i acceder a j pero no viceversa. Con comunicación en dos sentidos $g_{i,j}=1$ permite a ambos acceder a la información del otro respectivamente. El conjunto de todas las estrategias es denominado G_i. Nos restringiremos a estrategias puras. Dado que los agentes se encuentran con la dicotomía de formar un lazo ó no con los otros n-1 agentes, el número de estrategias del agente i es claramente $|G_i| = 2^{n-1}$. El conjunto $G=G_1\times\ldots\times G_n$ es el espacio de las estrategias puras a la que se enfrenta. Ahora vamos analizar dos tipos de flujo de información y vamos a derivar las estrategias correspondientes a cada flujo.

2.1 Flujo monodireccional

En el modelo de flujo monodireccional un perfil de estrategias puede representarse como una red directa $g=(g_1,¼,g_n)$ en G. El enlace $g_{i,j}=1$ es representado por una línea empezando en j con flecha apuntando a i. La Figura 2.A provee una demostración gráfica con $n=3$ agentes. Aquí el agente 1 ha formado un enlace (link a partir de ahora) con los agentes 2 y 3. Éstos no mantiene link entre sí. Aquí hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todas las redes dirigidas con n vértices y el conjunto G.

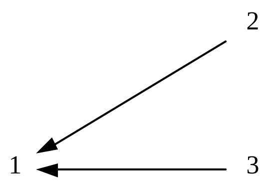

Figura 2.A

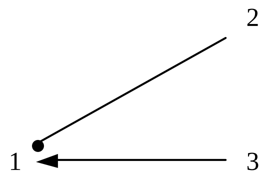

Figura 2.A

Si definimos a $N^d(i;g)=\{k\in N|g_{t,k}=1\}$ como el conjunto de agentes con quiénes i mantiene un link. Decimos que un sendero (*path*) de j a i en g sea que $g_{i,j}=1$ ó sea que existen distintos agentes $j_1,..,j_m$ diferentes de i y j tal que $g_{i,j1}=g_{j1,j2}=\ldots=g_{jm,j}=1$. Por ejemplo, en la Figura 2A existe un sendero del agente 2 al agente 3. La notación "$j \xrightarrow{g} i$" indica que existe un sendero desde j hasta i en g. Más aún, se define $N^d(i;g)=\{k\in N|\ k\xrightarrow{g} i\}\cup\{i\}$. Este es el conjunto de todos los agentes a cuya información accede i sea a través de un link ó sea a través de una secuencia de links. Típicamente nos referiremos como $N(i;g)$ como el conjunto de agentes observados por i. Usamos la convención de que $i \in N(i;g)$, es decir que el agente i se observa a sí mismo. Sea $\mu_t^d : G \rightarrow \{0,\ldots,n-1\}$ y $\mu_t : G \rightarrow \{1,\ldots,n\}$ definidas como $\mu_t^d(g) \equiv \left|N^d(i;g)\right|$ $\mu_t(g) \equiv |N(i;g)|$ para $g \in G$. Aquí $\mu_t^d(g)$ es el número de agentes con quiénes i ha formado un link mientras que $\mu_t(g)$ es el número de agentes observados por i.

Para completar la definición de juego en forma normal de formación de redes se especifica una clase de funciones de pago. Sea el conjunto de enteros positivos Z_+. Sea $\Phi : Z_+^2 \rightarrow R$ tal que $F(x,y)$ es estrictamente creciente en x y estrictamente decreciente en y. Definamos la función de pago de cada agente como $P_i : G \rightarrow R$ como

$$(2.1) \qquad \Pi_i(g) = \Phi\left(\mu_i(g), \mu_i^d(g)\right)$$

Dada las propiedades que suponemos de las funciones F, $\mu_i(g)$ puede ser interpretado como el beneficio que cada agente i recibe de sus links, mientras que $\mu_i^d(g)$ mide el costo asociado a mantener dichos links.

La función de pagos en (2.1) supone implícitamente que el valor de la información no depende del número de individuos a través del cual ésta pasa, es decir que no existe caída de información ni retrasos en la transmisión. En la sección 5 se repasará que consecuencias tiene relajar dichos supuestos.

Un caso especial de (2.1) es cuando los pagos son lineales. Para definir esto, se especifican dos parámetros $V > 0$ y $c > 0$, donde V es el valor de la información de cada agente (para él y para los otros), mientras que c es el costo de la formación del link. Sin pérdida de generalidad, V puede ser normalizado a 1. Ahora definimos $\Phi(x,y) = x - yc$, es decir

$$(2.2) \quad \Pi_i(g) = \mu_i(g) - \mu_i^d(g)c$$

En otras palabras, el pago del agente i es el número de agentes que él observa menos el total de costos de formación de los links. Identificamos tres rangos de parámetros de importancia. Si $c \in (0,1)$, entonces el agente i deseará formar un link con el agente j por el valor de la información de j solamente. Cuando $c \in (1,n\text{-}1)$, el agente i requerirá a j para observar a algunos agentes adicionales para inducirlo a él a formar un link con j. Finalmente, si $c > n\text{-}1$ entonces el costo de la formación del link excede el beneficio total de la información disponible del resto de la sociedad. Aquí, la estrategia dominante para i será no formar ningún link con ningún agente.

2.2 Flujo bidireccional

En el modelo de flujo bidireccional, se define al perfil de estrategias $g=(g_1, ¼, g_n)$ en G como una red no dirigida. El link $g_{i,j}=1$ es representado por una línea uniendo a j con i. Los círculos en las líneas que se ubican cerca de cada agente indican que ha sido él quién ha iniciado el link. La Figura 2B muestra el ejemplo de la Figura 2A para el caso de flujo bidireccional. Como antes, el agente 1 ha formado un link con el agente 2 y 3, el agente 2 ha formado un link con el agente 1 mientras que el agente 3 no se ha conectado con ningún otro agente. Cada estrategia $g\in G$ tiene una única representación en el modo mostrado en la figura. El link con un círculo declara cuál de los agentes inicio el lazo.

Para describir formalmente el flujo de información, es útil definir la clausura (*closure*) de g: esta es una red no dirigida notada como $\overline{g}=cl(g)$ y definida como $\overline{g}_{i,j}=\max\{g_{i,j},g_{j,i}\}$ para cada agente i y j en N. Decimos entonces que un *sendero-bd* (por bidireccional) en g entre i y j es $\overline{g}_{i,j}=1$ ó que existen agentes $j_1,\ldots,j_m$ distintos entre ellos y de i y j tal que $\overline{g}_{i,j_1}=\ldots=\overline{g}_{i,j_m}=1$. Escribimos entonces que $j\overset{\overline{g}}{\leftrightarrow}i$ para indicar el *sendero-bd* entre i y j en g. Sea $N^d(i;g)$ y $\mu_i^d(g)$ igualmente definidos como la sección anterior. El conjunto $N(i;\overline{g})=\{k|\, j\overset{\overline{g}}{\leftrightarrow}k\}\cup\{i\}$ consiste de agentes que i observa en g bajo flujo de información bidireccional, mientras que $\mu_t(\overline{g})\equiv|N(i;\overline{g})|$ representa su cardinalidad. El pago que obtiene el agente i en la red g se define entonces como:

$$(2.3)\quad \overline{\Pi}_i(g)=\Phi\left(\mu_i(\overline{g}),\mu_i^d(g)\right)$$

donde $F(.,.)$ se define como en 2.1. El caso de los pagos lineales es nuevamente $F(x,y)=x-yc$. Se obtiene análogamente a (2.2)

$$(2.4)\quad \overline{\Pi}_i(g)=\mu_i(\overline{g})-\mu_i^d(g)c$$

Los rangos de los parámetros $c\in(0,1)$, $c\in(1,n\text{-}1)$ y $c>n\text{-}1$ mantiene las mismas interpretaciones de la sección precedente.

2.3 Redes de Nash y eficientes

Dada una red $g \in G$, sea g_{-i} la red que se obtiene cuando todos los links del agente i son removidos. La red g puede ser escrita como $g = g_i \oplus g_{-i}$ donde la '$\oplus$' indica que g está formada por la unión de los links en g_i y en g_{-i}. Bajo comunicación monodireccional, la estrategia g_i se dice que es la mejor respuesta del agente i a g_{-i} si

(2.5) $\quad \boldsymbol{P}_i(g_i \oplus g_{-i}) \geq \boldsymbol{P}_i(g_i' \oplus g_{-i}) \qquad$ para todo $g_i' \in G$

El conjunto de las mejores respuestas de todos los agentes a g-i se denota como $MR_i(g_{-i})$. Más aún, una red $g=(g_1,...,g_n)$ se dice que es una red de Nash si $g_i \in MR_i(g_{-i})$ para cada i, es decir los agentes mantienen un equilibrio de Nash. Una red de Nash estricta es una donde cada agente obtiene un pago estrictamente superior con su estrategia actual de la que obtendría con cualquier otra estrategia. Para una red con flujo bidireccional de información las definiciones se mantienen, excepto que $\overline{\boldsymbol{P}}_i$ reemplaza a $\boldsymbol{P}_i$ en todos lados. Asimismo el perfil de mejores respuestas se anota como $\overline{MR}_i(\cdot)$.

Debemos definir las medidas de bienestar en términos de la suma de los pagos a todos los agentes. Formalmente, sea $W{:}G \rightarrow R$ definida como $W(g) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i(g)$ para $g \in G$. Una red g es eficiente si $W(g) \geq W(g')$ para todo $g' \in G$. La función correspondiente al caso de la comunicación bidireccional se escribe como $\overline{W}$. Para las funciones lineales de pago observadas anteriormente y especificadas en (2.2) y (2.4), una red eficiente es una que maximiza el valor total de la información que se encuentra disponible para los agentes, menos el costo agregado de la comunicación.

Dos redes $g \in G$ y $g' \in G$ son equivalentes si g' se obtiene como una permutación de las estrategias de los agentes en g. Por ejemplo, si g es la red de la Figura 2.A y g' es la red donde los agentes 1 y 2 son intercambiados, entonces g y g' son equivalentes. La relación de equivalencia particiona a G en clases: cada clase se denomina *arquitectura*.

2.4 El proceso dinámico

Describimos un proceso simple que es una versión general de la dinámica de mejor respuesta. La formación de redes es supuesta como un juego repetido cada periodo $t = 1,2,\ldots$ En cada período $t \geq 2$, cada agente observa la red del período previo. Con alguna probabilidad fija $r_i \in (0,1)$ se supone que el agente i exhibe inercia, es decir mantiene la estrategia empleada en el período previo. Más aún, si el agente no exhibe inercia, lo cual ocurre con probabilidad $p_i = 1 - r_i$ elige una estrategia de mejor respuesta miope a las estrategias de mejores respuestas de todos los otros participantes en el periodo previo. Si existe más de una mejor respuesta cada una de ellas es supuesta de ser elegida con probabilidad positiva. El último supuesto introduce cierto grado de mixtura en el proceso dinámico y en particular descarta la posibilidad de que un equilibrio débil de Nash se convierta en un estado absorbente de todos los otros equilibrios.

Formalmente, dada un conjunto A, sea $\Delta(A)$ la función de probabilidades sobre A. Suponemos que para cada agente i existe un número $p_i \in (0,1)$ y una función f_i: $G \rightarrow \Delta(A)$ donde f_i satisface, para todo $g = g_i \oplus g_{-i} \in G$:

(2.6) $f_i(g) \in \text{Interior } \Delta(MR_i(g_{-i}))$

Para $\hat{g}$ en el apoyo de $f_i(g)$ la notación $f_i(g)(\hat{g})$ denota la probabilidad asignada a $\hat{g}$ por la medida de probabilidad de $f_i(g)$. Si la red en $t > 1$ es $g^t = g^t_i \oplus g^t_{-i}$ la estrategia del agente i en $t+1$ se supone dada por

$$g_i^{t+1} \begin{cases} \hat{g}_i \in apoyo \text{ de } \varphi_i(\text{g}), & \text{con probabilidad } p_i \times \varphi_i(g)(\hat{g}), \\ g_i^t, & \text{con probabilidad } 1 - p_i \end{cases} \qquad (2.27)$$

La ecuación (2.7) establece que con probabilidad $p_i \in (0,1)$, el agente i elige una mejor respuesta ingenua a las estrategias de otros agentes. Es importante notar que bajo esta especificación, un agente puede cambiar de estrategia (hacia otra estrategia de mejor respuesta) incluso si actualmente está jugando una estrategia de mejor respuesta según el perfil de estrategias actuales. La función f_i define ahora como el agente aleatoriza si existe más de una estrategia de mejor respuesta. Más aún, con probabilidad $1 - p_i$ el agente i exhibe "inercia", es decir mantiene su estrategia previa.

Suponemos que la elección de inercia así como la aleatorización sobre las estrategias de mejores respuestas por los diferentes agentes es independiente entre agentes. De este modo, nuestras reglas de decisión inducen a una matriz de transición T que mapea el espacio de estados G al conjunto de todas las distribuciones de probabilidad $\Delta(G)$ en G. Sea $\{X_t\}$ una cadena estacionaria de Markov empezando por la red inicial $g \in G$ con la anteriormente mencionada matriz de transición. El proceso $\{X_t\}$ describe la dinámica de la evolución de la red dada nuestros supuestos sobre la conducta del agente.

El proceso dinámico en el modelo de dos vías es el mismo excepto que usamos el mapeo de mejor respuesta $\overline{MR}_i(\cdot)$ en vez de $MR_i(.)$.

3. El modelo de flujo monodireccional

En esta sección analizamos la naturaleza de la formación de redes cuando la información fluye en una sola dirección. Los resultados de Bala y Goyal proveen una caracterización de redes estrictas de Nash y de redes eficientes y muestran que el proceso dinámico converge a una red límite, la cual es una red estricta de Nash en todos los casos.

3.1 Las propiedades estáticas

Dada una red g, un conjunto $C \subset N$ es llamado un *componente* de g si para cada par distinto de agentes i y j en C tenemos que $j \xrightarrow{g} i$ (equivalentemente, $j \in N(i;g)$) y no hay un superconjunto estricto C' de C para el cual esto es cierto. Un componente C se dice que es mínimo si C no es más un componente luego del reemplazo de un link $g_{i,j} = 1$ entre dos agentes i y j en C por $g_{i,j} = 0$, *ceteris paribus*. Una red g se dice conectada si tiene un único componente. Si el único componente es mínimo, g se dice *mínimamente conectada*. Una red que no está conectada se denomina *desconectada*. Una red se dice *vacía* si $N(i;g) = \{i\}$ y se la llama *completa* si $N^d(i;g) = N \backslash \{i\}$ para todo $i \in N$. Denotamos a las redes vacías y completas como g^e y g^c respectivamente. Una red de rueda es una donde los agentes están ordenados así $\{i_1, \ldots, i_n\}$ con $g_{i_2,i_1} = \cdots = g_{i_n,i_{n-1}} = g_{i_1,i_n} = 1$ y no hay otros links. La red de rueda se escribe como g^W. Una red de estrella tiene un agente central i tal que $g_{i,j} = g_{j,i} = 1$ para todo $j \in N \backslash \{i\}$ y no hay más links.

La distancia geodésica de un agente j hacia un agente i en g es el número de links en el sendero más corto de j a i, y es denominado $d(i,j;g)$. Fijamos $d(i,j;g) = \infty$ si no hay sendero de j a i en g.

El primer resultado ilustra una propiedad general de las redes de Nash cuando los agentes están simétricamente posicionados en términos de información y costos de acceso: en equilibrio, no hay comunicación social ó cada agente tiene acceso a toda la información de la sociedad.

Proposición 3.1: *Sean los pagos dados por (2.1). Una red de Nash es vacía ó mínimamente conectada.*

Prueba

Sea g una red de Nash. Supongamos que $F(n,1) > F(1,0)$. Sea $i \in N$. Notamos que $m_i(g) \leq n$. Entonces $\mu_i^d(g) \geq 1$ implica que $P_i(g) = F(m_i(g), \mu_i^d(g)) \leq F(n, \mu_i^d(g)) \leq F(n, 1) < F(1, 0)$, lo cual es imposible dado que g es una red de Nash. Entonces, es una estrategia dominante para cada agente no tener ningún link y g es una red vacía.

Consideremos el caso de $F(n,1)=F(1,0)$. Un argumento análogo al anterior muestra que $\mu_i^d(g)\in(0,1)$ para cada $i\in N$. Más aún, $\mu_i^d(g)=1$ puede ser mantenido si $\mu_i=n$. Ahora es simple el establecer que si g es no vacía, debe ser una red de rueda, la cual está conectada.

Del mismo modo suponga que $F(n,1)>F(1,0)$. Suponga que g no es una red vacía. Elija $i\in \text{argmax}_{i'\in N} m_{i'}(g)$. Dado que g es no vacía, $x_i\equiv m_{i'}(g)\geq 2$ e $y_i\equiv m_i^d(g)\geq 1$. Más aún, dado que g es Nash, $P_i(g)=F(x_i, y_i)\geq F(1,0)$. Se puede decir que i observa a todos, es decir $x_i=n$. Suponga en vez que $x_i<n$. Entonces existe un $j\notin N(i;g)$. Claramente, $i\notin N(j;g)$ tampoco, porque de otro modo sería un subconjunto estricto de $N(j;g)$ y $m_j(g)>x_i=m_i(g)$, contradiciendo la definición de i. Si $y_i\equiv m_i^d(g)=0$, entonces j se desvía y forma un link con i, *ceteris paribus*. Su pago será $F(x_i+1,1)>F(x_i,1)\geq F(1,0)$, de tal modo que estará estrictamente mejor. Entonces, $y_j\geq 1$. Por definición de i, tenemos que $x_j\equiv m_j(g)\leq x_i$. Sea que j borra todos sus links y forma en vez un sólo link con i. Su nuevo pago será $F(x_i+1,1)>F(x_i,1)\geq F(x_j,1)\geq F(x_j,y_j)$, es decir él esta estrictamente mejor. La contradicción implica que $x_i=n$ es requerido, es decir que existe un sendero de cada agente de la sociedad hacia el agente i.

Sea i del mismo modo que arriba. Un agente j es llamado *crítico* (para i) si $m_i(g_{-j})<m_i(g)$; si en vez de eso $m_i(g_{-j})=m_i(g)$ el agente j es llamado *no crítico*. Sea E el conjunto de agentes *no críticos*. Si $j\in \text{argmax}_{i'\in N} d(i,i';g)$, claramente j es no crítico, por lo que E es no vacío. Mostramos que $j\in E$ implica $m_j(g)=n$. Supongamos que esto no fuese cierto. Si $y_j\equiv m_j^d(g)=0$, entonces j puede desviarse y formar un link con i. Su nuevo pago será $F(n,1)>F(1,0)$. Entonces $y_j\geq 1$. Si $x_j\equiv m_j(g)<n$, sea que j borra sus links y forma un nuevo link con i. Dado que él es no crítico, su nuevo pago será $F(n,1)>F(x_j,1)\geq F(x_j,y_j)$, es decir que él otra vez obtendrá mejor pago. Entonces se sigue que $m_j(g)=n$ es necesario.

Se afirma que para cada agente $j_1\notin E\cup\{i\}$, existe un $j\in N(j_1;g)$. Dado que j_1 es crítico, existe un $j_2\in N(j_1;g)$ tal que cada sendero de j_2 a i en g envuelve al agente j_1. De este modo, $d(i,j_2;g)>d(i,j_1;g)$. Si $j_2\in E$ estamos hechos; en cualquier otro caso, bajo el mismo argumento, existe un $j_3\in N(j_2;g)$ tal que $d(i,j_3;g)>d(i,j_2;g)$. Dado que i observa a cada agente y N es finito, repitiendo el mismo proceso de arriba no más de n–2 veces brindará un agente $j\in E$ tal que $j\in N(j_1;g)$. Dado que ya mostramos que $m_j(g)=n$ tenemos que $m_{j1}(g)=n$ se verifica también. Entonces g está conectada. Si g no estuviese *mínimamente conectada*, entonces algún agente podría eliminar un link y aún así seguir observando a todos los agentes en la sociedad, de este modo incrementando su pago, en cuyo caso g no sería Nash. El resulta se aplica de esto modo para adelante.

En palabras quiere decir que se debe considerar una red no vacía de Nash y suponer que el agente i es el que observa a la mayor cantidad de otros agentes dentro de la red. Supongamos que i no observa *a todos*. Entonces hay un agente j que no es observado por i y que no observa a *i* (dado que entonces *j* observaría más agentes que *i*). Dado que *i* obtiene valor de sus links y los pagos se suponen simétricos, *j* debe tener también algunos links. Dejemos a *j* desviarse de su estrategia de Nash formando un link con *i* solo. Haciendo esto, *j* observará estrictamente más agentes que los que hace *i*, dado que él tendrá beneficios adicionales por observar a *i*. Dado que *j* estaría observando más agentes que *i* en su estrategia original, *j* incrementaría su pago desviándose. Esta contradicción implica que *i* debe observar a todos los agentes de la sociedad. Luego se demuestra que cada otro agente tendrá un incentivo para tanto para linkearse con *i* ú observarlo a través de una serie de links, por lo que la red quedará entonces conectada. Si la red no está mínimamente conectada, entonces algún agente podría borrar su link y aún así observaría a todos los agentes, lo que contradiría que la red sea Nash.

Una red de Nash en la cual algún agente tenga múltiples estrategias de mejor respuesta es probable que sea inestable dado que este agente puede decidir cambiar entre estrategias de mejor respuesta cuyo pago sea equivalente. Ello motiva la investigación de las redes estrictas de Nash. Se tiene que pueden existir solo dos arquitecturas posibles para tales redes.

Proposición 3.2 *Sea los pagos dados por (2.1). Una red estricta de Nash es una red de rueda ó una red vacía.*

(a) Si $F(\hat{x}+1,\hat{x})>F(1,0)$ *para algún* $\hat{x}$ Î{1,¼, *n*-1) *entonces la red de rueda es la única estricta de Nash.*

(b) Si $F(x+1,x)<F(1,0)$ *para todo* xÎ{1,¼, *n*-1) *y* $F(n,1)>F(1,0)$ *entonces la red vacía y la red de rueda son ambas estrictas de Nash*

(c) Si $F(x+1,x)<F(1,0)$ *se mantiene para todos los* xÎ{1,¼, *n*-1) *y* $F(n,1)<F(1,0)$, *entonces la red vacía es la única estricta de Nash.*

Prueba

Sea $g\in G$ sea estricta de Nash y supóngase que no es una red vacía. Mostramos que para cada k hay una y solo un agente i tal que $g_{i,k}=1$. Dado que g es Nash, esta mínimamente conectada por la Proposición 3.1. De aquí se sabe que hay un agente i que tiene un link con k. Supongamos que existe otro agente j tal que $g_{j,k}=1$. Como g es mínima tenemos que $g_{i,j}=0$, porque de otro modo i podría borrar el link con k y g estaría aún conectada. Sea $\hat{g}$ la estrategia por la cual i borra su link con k y forma a su vez uno con j, *ceteris paribus*. Definimos $\hat{g}=\hat{g}\oplus g_{-i}$, donde $\hat{g}\neq g$. Entonces $\mu_i^d(\hat{g})=\mu_i^d(g)$. Más aún, dado que $k\in N^d(j;g)=N^d(j;\hat{g})$, claramente $\mu_i(\hat{g})\geq\mu_i(g)$ también. Entonces i obtendrá al menos tanto con la estrategia $\hat{g}_i$ como con la anterior g_i, lo cual viola la hipótesis de que g_i es la única mejor respuesta a g_{-i}. Como cada agente tiene uno solo de los otros agentes que tiene un link con él, g tiene exactamente n links. Se sigue entonces que la única red conectada con n links es la red de rueda. Las secciones (a)-(c) siguen una verificación directa. C.Q.D.

Para el caso de pagos lineales $P_i(g)=\mu_i(g)-\mu_i^d(g)c$ de (2.2) La Proposición 3.2(a) se reduce diciendo que la rueda es la única red estricta de Nash cuando $c\in(0,1)$. La Proposición 3.2(b) implica que la rueda y la red vacía son estrictas de Nash en la región $c\in(1, n\text{-}1)$ mientras que la Proposición 3.2(c) implica que la red vacía es la única estricta de Nash cuando $c>n\text{-}1$. El resultado en esta subsección caracteriza a las redes eficientes.

Proposición 3.3: *Sean los pagos dados por (2.1)*

(a) Si $F(n,1)>F(1,0)$ entonces la red de rueda es la única estructura de red eficiente,

(b) Si $F(n,1)<F(1,0)$ entonces la red vacía es la única estructura de red eficiente.

Prueba

Considere la parte (a). Sea G el conjunto de valores $(m_i(g), m^d_i(g))$ según g mapea sobre G. Si $m^d_i(g)=0$, entonces $m_i(g)=1$, mientras $m^d_i(g)\in\{1,\ldots,n\text{-}1)$, entonces $m_i(g)\in\{m^d_i(g)+1, n)$. De este modo, $G\subset\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\text{-}1\}\cup\{(1,0)\}$. Dado $(x,y)\in G\backslash\{(1,0)\}$, tenemos $F(n,1)\geq F(n,y)\geq F(x,y)$ dado que F es decreciente en su segundo argumento y creciente en sus primer argumento. Para la red de rueda g^W, nótese que $m_i(g^W)=n$ y $m^d_i(g^W)=1$. Ahora considere una red $g\neq g^W$; para cada $i\in N$, si $m^d_i(g)\geq 1$, entonces $m_i(g)\leq n$, mientras que si $m^d_i(g)=0$, entonces $m_i(g)=1$. En cualquier caso,

$$(3.1)\qquad P_i(g^W)=F(n,1)\geq F(m_i(g), m^d_i(g))=P_i(g)$$

donde se ha usado el supuesto de $F(n,1)>F(1,0)$. Del mismo modo, se sigue también que $W(g^W)=\Sigma_{i\in N}F(\mathrm{n},1)\geq\Sigma_{i\in N}F(m_i(g),m^d_i(g))=W(g)$. Entonces, g^W es una estructura eficiente. Para mostrar la unicidad, nótese que nuestro supuesto sobre F implica que la ecuación (3.1) se mantiene con estricta desigualdad si $m^d_i(g))\neq 1$ ó si $m_i(g))<n$. Tomemos $g\neq g^W$ como dado; si $m^d_i(g))\neq 1$ para incluso un i, entonces la desigualdad (3.1) es estricta, y $W(g^W)>W(g)$. Por otro lado, supongamos que $m^d_i(g))=1$ para todo $i\in N$. Dado que la rueda es la única red conectada con n agentes, y $g\neq g^W$ debe haber entonces un agente j tal que $m_j(g))<n$. Entonces (3.1) es otra vez una desigualdad estricta para el agente j y $W(g^W)>W(g)$, lo cual provee de unicidad al análisis.

En la parte (b), sea g diferente de la red vacía g^e. Entonces debe haber algún agente j tal que $m^d_i(g))\geq 1$. Para este agente $P_j(g^e)=F(1,0)>F(n, 1)\geq F(m_j(g), m^d_j(g))= P_j(g)$ mientras que para todos los otros agentes i, $P_i(g^e)=F(1,0)\geq P_i(g)\geq F(m_i(g), m^d_i(g))= P_j(g)$. Este resultado se verifica por sumatoria. C.Q.D.

3.2 Dinámica

Simulaciones realizadas por los autores demuestran que, dada la estructura de pagos supuesta, luego de varias secuencias de negociación la sociedad conectada por la red converge hacia la arquitectura de rueda. Es interesante ahora preguntarse ¿bajo qué condiciones –en la estructura de pagos, el tamaño de la sociedad, y la red inicial- el proceso dinámico converge? La convergencia del proceso, si y cuándo ésta ocurre, es muy atrayente desde el punto de vista económico dado que ello implica que agentes que persiguen miópicamente objetivos auto-interesados, sin asistencia de un coordinador central, son de todos modos capaces de evolucionar un patrón de lazos de comunicación en el tiempo. El siguiente resultado muestra que la convergencia ocurre sin afectación específica del tamaño de la red ó de la forma de la red inicial.

Teorema 3.1: *Sean las funciones de pago dadas por la ecuación (2.1) y sea g la red inicial.*

(a) Si hay algún $\hat{x}$ *Î{1,¼,n-1} tal que F(*$\hat{x}$ *+1,*$\hat{x}$ *)³F(1,0), entonces el proceso dinámico converge a la red de rueda con probabilidad 1.*

(b) Si en vez, F(x+1,x)<F(1,0) para todo xÎ{1,¼,n-1} y F(n,1)>F(1,0), entonces el proceso converge ya sea a la red de rueda ó a la red vacía, con probabilidad 1.

(c) Finalmente, si F(x+1,x)<F(1,0) para todo xÎ{1,¼,n-1} y F(n,1)<F(1,0), entonces el proceso converge a la red vacía, con probabilidad 1.

Prueba

La prueba recae en demostrar que dado una red arbitraria *g* hay alguna probabilidad positiva de transitar hacia una red estricta de Nash en tiempo finito, cuando los agentes sigan las reglas del proceso. Las redes estrictas de Nash son estados absorbentes, por lo que los resultados entonces derivarían de la teoría estándar de las cadenas de Markov. Por (2.7) hay una probabilidad positiva que al menos un agente exhibirá inercia en algún período determinado. De ello la prueba seguirá si especificamos una secuencia de redes donde en cada estadio de la secuencia sólo uno (apropiadamente elegido) de los agentes elija una mejor respuesta. En lo que sigue, a menos que se especifique otra cosa, cuando permitimos a un agente elegir la mejor respuesta, explícitamente suponemos que el resto de los agentes exhiben inercia.

Empezamos por la parte (a). Se supone inicialmente que existe un agente j_1 para quién $\mu_{j_1}(g)=n$, es decir j_1 observa a todos los otros agentes en la sociedad. Sea $j_2 \in \mathrm{argmax}_{m\in N} d(j_1,m;g)$. En otras palabras, j_2 es un agente más lejano de j_1 en g. En particular, esto significa que por cada $i \in N$ tenemos $i \xrightarrow{g_{-j_2}} j_1$, es decir que el agente j_1 observa a cada agente de la sociedad sin utilizar ninguno de los links de j_2. Ahora j_2 elige su mejor respuesta. Nótese que un solo link con el agente j_1 le es suficiente a j_2 para observar a todos los otros agentes de la sociedad, dado que $i \xrightarrow{g_{-j2}} j_1$ para todo $i \in N \setminus \{j_1, j_2\}$. Más aún, como $F(n,1) \geq F(\hat{x}+1,1) \geq F(\hat{x}+1,\hat{x}) \geq F(1,0)$, formando un link con j_1 (débilmente) domina a no tener ningún link para j_2. De este modo, j_2 tiene una mejor respuesta $\hat{g}_{j_2}$ de la forma $\hat{g}_{j_2,j_1} = 1$, $\hat{g}_{j_2,m} = 0$ para todo $m \neq j_1$. Sea que el agente j_2 juega su mejor respuesta. Denotando la red resultante como g^1 donde $g^1 = \hat{g}_{j_2} \oplus g_{-j2}$. Nótese que la propiedad $i \xrightarrow{g^1} j_1$, para todo $i \in N$ se mantiene para esta red.

Más generalmente, fíjese un s satisfaciendo $2 \leq s \leq n-1$, y sea g^{s-1} la siguiente red: hay s distintos agentes $j_1, \ldots, j_s$ tal que para cada $q \in \{2, \ldots, s\}$ tenemos que $g^{s-1}_{j_q, j_{q-1}} = 1$ y $g^{s-1}_{j_q, m} = 0$ para todo $m \neq j_{q-1}$, más aún, $i \xrightarrow{g^{s-1}} j_1$ para todo $i \in N$. Elija j_{s+1} como sigue:

$$(3.2) \quad j_{s+1} \in \operatorname{argmax}_{m \in N \setminus \{j1, \ldots, js\}} d(j_1, m; g^{s-1})$$

Nótese que dado g^{s-1}, una mejor respuesta $\hat{g}_{j_{s+1}}$ para j_{s+1} es formar un link con j_s solamente. Haciendo esto, el observa a $j_s, \ldots, j_1$ y a través de j_1 a los restantes agentes de la sociedad también. Sea $g^s = \hat{g}_{j_{s+1}} \oplus g^{s-1}_{-j_{s+1}}$ la red resultante cuando j_{s+1} elige esta estrategia. Nótese también que dado que la decisión de formación de links de j_{s+1} es irrelevante para j_1 observándolo a él, tenemos que $j_{s+1} \xrightarrow{g^s} j_1$, siendo que lo mismo se mantiene para $j_s, \ldots, j_2$. Entonces podemos continuar la inducción. Dejamos que el proceso continúe hasta que j_n elija su mejor respuesta en la manera descripta arriba: en este estadio, el agente j_1 es el único agente con (posiblemente) más de un link. Si se le admite al agente j_1 mover de nuevo, su mejor respuesta es formar un solo lazo con j_n, lo cual crea la red de rueda g^W. Por la Proposición 3.2(a), g^W es un estado absorbente.

El argumento de arriba muestra que (a) se mantiene si suponemos que hay algún agente en g que observa al resto de la sociedad. Ahora mostramos que este es sin perdida de generalidad. Empezando de g, elegimos un agente i' y lo dejamos jugar una mejor respuesta $\hat{g}_{i'}$. Denominemos a la red resultante $\hat{g}_{i'} \oplus g_{i'}$ como g'. Nótese que podemos suponer que $\mu^d_{i'}(g') \geq 1$. Esto es así porque no formar ningún link otorga una pago no mayor que formar $\hat{x}$ links y observar a $\hat{x}+1$ agentes (ó más). Si $m_{i'}(g') = n$, estamos hechos. De otro modo, si $m_{i'}(g') < n$ elegimos $i'' \notin N(i'; g')$ y lo dejamos jugar su mejor respuesta $\hat{g}_{i''}$. Definimos $g'' = \hat{g}_{i''} \oplus g_{i'}$. Como antes podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\hat{g}_{i''}$ involucra al menos un link. Declaramos entonces que $m_{i''}(g'')\geq m_{i'}(g')+1$. De hecho, por formar un link con *i'* el agente *i''* puede observar a *i'* y a todos los agentes que *i'* observa, y de ese modo se garantiza a si mismo un pago de $F(m_{i'}(g')+1,1)$. La declaración ahora sigue porque $F(m_{i'}(g')+1,1)>F(x,y)$ para cualquier par (x,y) que satisfaga $x\leq m_{i'}(g')$ e $y\geq 1$. Repitiendo este argumento si es necesario, eventualmente arribamos a una red donde algunos agentes observan la sociedad entera, como se requiere.

Ahora viramos a las partes (b) y (c). Si $F(n,1)<F(1,0)$, es una estrategia dominante para cada agente no formar ningún link. La declaración (c) se sigue simplemente de esta observación. Consideramos (b) ahora. Nótese que por la Proposición 3.2(b) que la red de rueda es estricta de Nash para este régimen de pagos. Supongamos ahora que existe un agente $i\in N$ tal que $m_i(g)=n$. Entonces el argumento empleado en la parte (a) asegura la convergencia hacia la rueda con probabilidad positiva. Si, en vez, $m_i(g)<n$, sea $\hat{x}\geq 2$ el más grande numero tal que $F(\hat{x},1)\leq F(1,0)$. Nótese que $\hat{x}\leq n$-1 dado que $F(n,1)>F(1,0)$. Supóngase que exista un $i\in N$ tal que $m_i(g)<\hat{x}$. Elegimos un agente *i'* y consideramos una red *g'* formada después de que él elija su mejor respuesta. Supongamos que $\mu_{i'}^{d}(g')\geq 1$ y que $m_{i'}(g')<\hat{x}$. Entonces, $P_{i'}(g')=F(m_{i'}(g'),\mu_{i'}^{d}(g'))<F(\hat{x},1)\leq F(1,0)$ y formando ningún link lo posiciona estrictamente mejor. De este modo,. Si i' tiene una mejor respuesta que involucra la formación de al menos un link, el debe observar al menos $\hat{x}$ agentes (incluyéndose a sí mismo) en la red resultante. Entonces, dejamos a cada agente jugar a su turno –sea que todos elijan no formar links, en cuyo caso el proceso es absorbido por una red vacía ó algún agente eventualmente observa al menos $\hat{x}$ agentes. En el segundo caso, podemos emplear los argumentos primeros para mostrar convergencia con probabilidad positiva hacia una red de rueda. C.Q.D.

4. El modelo de flujo bidireccional

Ahora vamos a estudiar el caso en el que el flujo de información es de dos vías. Los resultados proveerán una caracterización de las redes estrictas de Nash así como de las redes eficientes. También se mostrará que el proceso dinámico converge a una red límite que es estricta de Nash para una amplia gama de funciones de pagos.

4.1 Propiedades estáticas

Sea una red *g* dada. Un conjunto $C\subset N$ es llamado una *red-bd* de *g* si para todo *i* y *j* en *C* hay un sendero-*bd* entre un agente en *C* y uno en $N\backslash C$. Un *componente-bd C* es llamado *mínimo* si

(a) no existe un *ciclo-bd* dentro de C, es decir $q \geq 3$ agentes $\{j_1,\ldots,j_q\} \subset C$ tal que $\bar{g}_{j_1,j_2} = \ldots = \bar{g}_{j_q,j_1} = 1$, y

(b) $g_{i,j} = 1$ implica $g_{j,i} = 0$ para cualquier par de agentes i,j en C.

La red g es llamada *conectada-bd* si tiene un único *componente-bd* en C. Si el único *componente-bd* en C es *mínimo*, decimos que g está *mínimamente conectada-bd*. Esto implica que hay un único *sendero-bd* entre cualquier par de agentes en N. La *distancia-bd* entre dos agentes i y j en g es la longitud del *sendero-bd* más corto entre los dos y es notada como $d(i,j;\bar{g})$. Ahora seguimos con un resultado preliminar sobre la estructura de redes de Nash.

Proposición 4.1: *Sean los pagos dados por (2.3). Una red de Nash es vacía ó mínimamente conectada-bd.*

Prueba

Sea g una red no vacía de Nash y supongamos que no esta *conectada-bd*. Dado que g es no vacío entonces existe un *componente-bd* C tal que $|C| \equiv x \geq 2$. Elegimos $i \in C$ satisfaciendo $m^d_i(g) \geq 1$. Entonces tenemos que $F(x,1) \geq F(x,m^d_i(g)) = F(m_i(\bar{g}),\ m^d_i(g)) = \overline{\boldsymbol{P}}_i(g)$. Nótese que g_{-i} puede ser pensada como la red donde i no forma ningún link. Dado que g es Nash, $\overline{\boldsymbol{P}}_i(g) \geq \overline{\boldsymbol{P}}_{-i}(g) = F(m_i(g_{-i}),0) \geq F(1,0)$. De este modo, $F(x,1) \geq F(1,0)$. Como g esta *conectada-bd* entonces existe un $j \in N$ tal que $j \notin C$. Si j es un *componente-bd singleton* entonces el pago al agente j desde un link con i es $F(x+1,1) > F(x,1) \geq F(1,0)$, lo cual viola la hipótesis de que el agente j esta eligiendo una mejor respuesta. Supongamos a su vez que j está en un *componente-bd* D donde $|D| \equiv w \geq 2$. Por definición hay al menos un agente en D que forma links; suponga sin perdida de generalidad que j es ese agente. Tal como con el agente i tenemos que $F(w,1) \geq \overline{\boldsymbol{P}}_j(g)$.

Supongamos sin perdida de generalidad que $w \leq x = |C|$. Suponga que el agente j borra todos sus links y luego forma un solo link con el agente $i \in C$. Entonces este pago es al menos $F(x+1,1) > F(w,1) \geq \overline{\boldsymbol{P}}_j(g)$. Esto viola la hipótesis de que el agente j esta jugando su mejor respuesta. La contradicción implica que g esta *conectada-bd*. Si g no esta mínimamente conectada, entonces existe algún agente que puede borrar un link y aún tener un *sendero-bd* con cualquier otro agente, por lo que g no es Nash. El resultado sigue este razonamiento. C.Q.D.

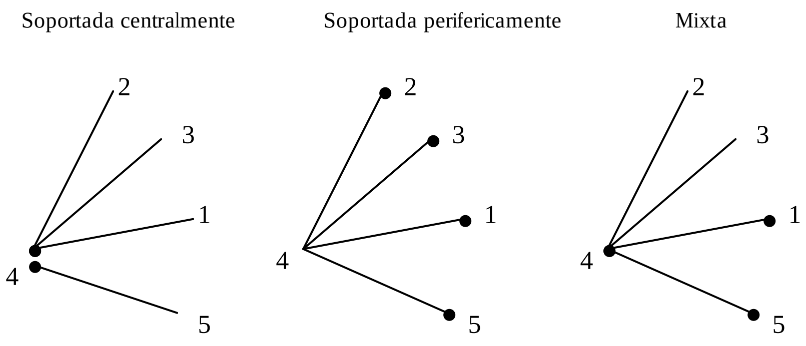

Figura 6A. Redes de estrella (modelo bidireccional)

Proposición 4.2: *Sean los pagos dados por (2.3). Una red estricta de Nash es una red de estrella centralmente sostenida ó una red vacía.*

(a) Una red de estrella centralmente sostenida es estricta de Nash si y sólo si F(n,n-1)>F(x+1,x) para todo x Î {0,¼, n-2)

(b) La red vacía es estricta de Nash si y solo si F(1,0)>F(x+1,x) para todo x Î {1,¼, n-1).

Prueba

Supongamos que g es estricta de Nash y no es una red vacía. Sea $\overline{g}$ =cl(g). Sean i y j agentes tal que $g_{i,j}=1$. Se postula que $\overline{g}_{i,j}=0$ para cualquier $j' \notin \{i,j\}$. Si esto no fuese cierto, entonces i puede borrar sus links con j y formar en vez uno con j', y recibir el mismo pago lo cual contradiría el supuesto de que g es estricto de Nash. De este modo cualquier agente con quién i esta directamente *linkeado* no puede tener ningún otro link. Como g esta mínimamente *conectado-bd* por la Proposición 4.1, i debe ser el centro de una estrella y $g_{j,i}=0$. Si $j' \neq j$ es tal que $g_{j',i}=1$, entonces j' puede cambiar a j y obtener el mismo pago, nuevamente contradiciendo el supuesto que g es Nash estricta. Entonces, la estrella debe ser sostenida centralmente.

Bajo la hipótesis en (a) es claro que una estrella centralmente sostenida es estricta de Nash, mientras que una red vacía no es Nash. Por otro lado, sea g una estrella centralmente sostenida con i como centro, y suponga que hay algún $x \in \{0,\ldots,n\text{-}2\}$ tal que $F(x+1,x) \geq F(n,n\text{-}1)$. Entonces i puede borrar todos menos los links de x y estar al menos tan bien, de modo que g no puede ser estricta de Nash. Argumentos similares se aplican para la hipótesis en (b). C.Q.D.

Para la especificación lineal (2.4), la Proposición 4.2 implica que cuando $c \in (0,1)$ la única red estricta de Nash es la estrella centralmente sostenida y cuando $c > 1$ la única red estricta de Nash es la red vacía.

En el caso de la eficiencia de la red, podemos decir que una red eficiente no necesita ser *conectada-bd* ó vacía. Se puede definir las siguientes caracterizaciones de redes eficientes.

Proposición 4.3: *Sean los pagos dados por (2.3). Todos los componentes-bd de una red eficiente son mínimos. Si F(x+1,y+1)³F(x,y), para todo yÎ{0,¼,n-2} y xÎ{y+1,¼,n-1} entonces una red eficiente esta conectada–bd.*

Como la intuición es simple la prueba formal es omitida. La minimalidad es una consecuencia directa de la ausencia de fricciones. En la segunda parte, la *conectividad-bd* se sigue la de hipótesis que un link adicional hacia un agente no observado es débilmente preferido por agentes individuales; dado que la información es bidireccional, tal link genera externalidades positivas adicionales y por ello incrementa el bienestar social.

Con flujos bidireccionales, la cuestión de la eficiencia es bastante compleja. Por ejemplo, la estrella centralmente sostenida puede tener un nivel diferente de bienestar que una red periféricamente sostenida, dado que el número de links mantenidos por cada agente es diferente en las dos redes. Sin embargo, para los pagos lineales dado por (2.4), puede demostrarse fácilmente que si $c \leq n$ una red es eficiente si y solo si esta *mínimamente conectada-bd* (en particular la estrella es eficiente), mientras que si $c > n$, entonces la red vacía es la única eficiente.

Referencia

Bala, Venkatesh y Sanjeev Goyal (2000), "A Non Cooperative Model of Network Formation", *Econometrica*, Vol. 68, No. 5 (Septiembre), págs. 1181-1229.